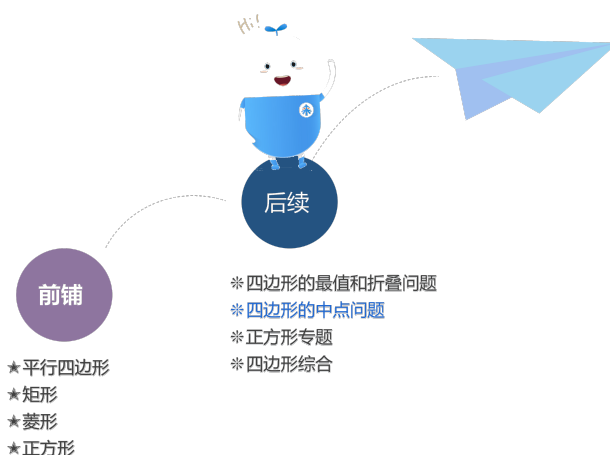
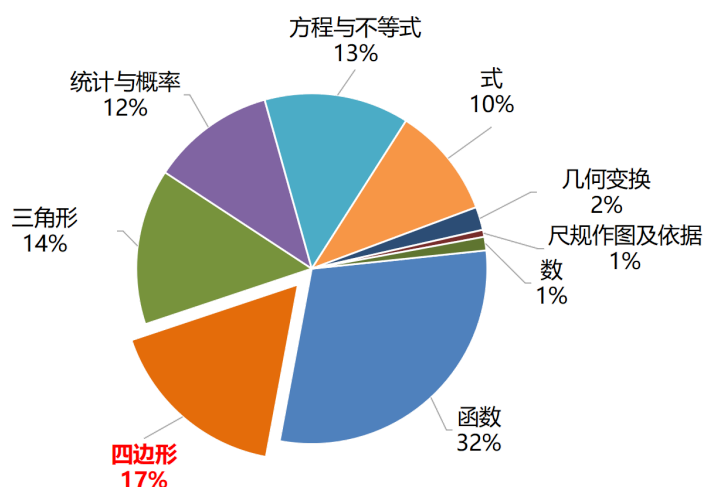


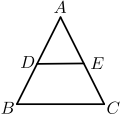
第1讲 中位线与中点四边形

平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《四边形的中点问题》，旨在帮助学生了解并熟练掌握四边形中点的相关性质，学会利用中点解决问题。

本模块难度稍难，适应于四边形的基础认知与短期突破，本模块分为中位线与中点四边形、中点辅助线综合2讲内容，帮助学生了解四边形中点这部分常见题型，掌握解题思路。

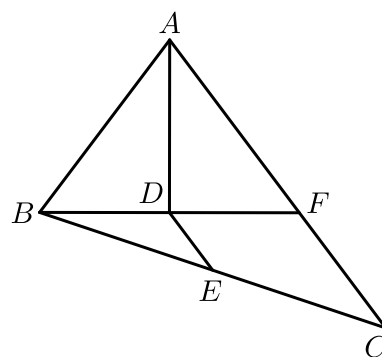


一、三角形中位线

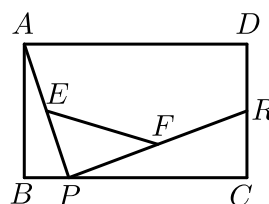
三角形中位线 	定义：连接三角形两边_____的线段叫做三角形的中位线． 定理：三角形的中位线_____于三角形的第三边，并且等于第三边的_____ 书写：若DE为$\triangle ABC$的中位线，则_____
---	---

例题1

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $AC = 10\text{cm}$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $BD \perp AD$ 于点 D ， BD 的延长线交 AC 于点 F ， E 为 BC 的中点，则 $DE =$ _____．



2. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，点 P 是 BC 边上任意一点， E ， F ， R 分别是 AP ， RP ， CD 的中点，则 EF 的长为（ ）．



A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

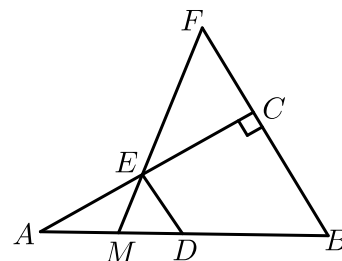
B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

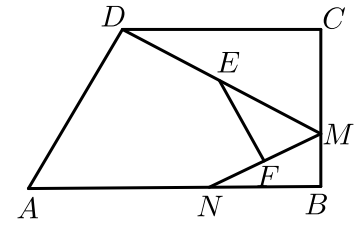
D. $\frac{5}{2}$

练习1

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，延长 BC 至点 F ，使 $CF = \frac{1}{2}BC$ ，连结 FE 并延长，交 AB 于点 M ．若 $BC = a$ ，则 $\triangle FMB$ 的周长为_____．

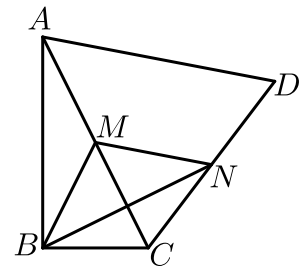


4. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ，点 M 、 N 分别为 BC 、 AB 上的动点（含端点）， E 、 F 分别为 DM 、 MN 的中点，则 EF 长度的最小值为（ ）。



- A. 3 B. 2.5 C. 2 D. 1

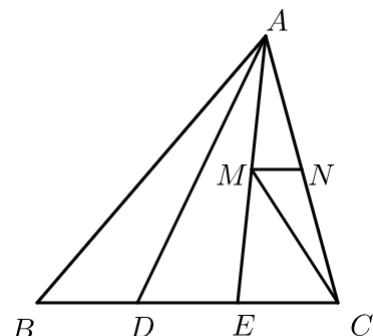
5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = AD$ ， M 、 N 分别为 AC 、 CD 的中点，连接 BM 、 MN 、 BN 。



- (1) 求证： $BM = MN$ 。
 (2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ， $AC = 2$ ，求 BN 的长。

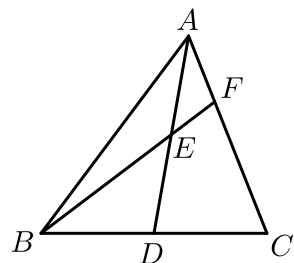
例题2

6. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 为 BC 边的三等分点， M 、 N 分别为 AE 、 AC 的中点， $\triangle ABC$ 的面积为24平方厘米，则 $\triangle MNC$ 的面积为 _____ 平方厘米。



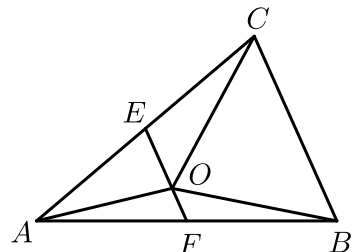
练习2

7. 如图所示， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AD 的中点， BE 的延长线与 AC 交于点 F ，则 $AF : AC$ 等于 ()。



- A. 1 : 2 B. 1 : 3 C. 2 : 3 D. 2 : 5

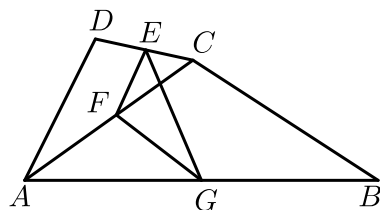
8. 如图， EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线， O 是 EF 上一点，且满足 $OE = 2OF$ 。则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比为 ()。



- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 3

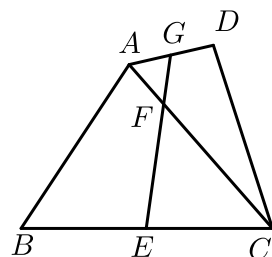
例题3

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 分别为 DC 、 AC 、 AB 的中点，且有 $\angle DAB + \angle B = 90^\circ$ ， $AD = 6$ ， $BC = 8$ ，则 $EG =$ _____ .



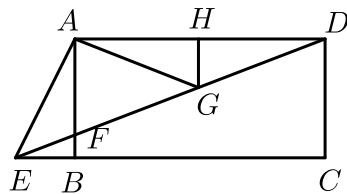
练习3

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， E 是 BC 的中点， G 是 AD 的中点， EG 交 AC 于点 F ， $\angle ACD = 30^\circ$ ， $\angle CAB = 70^\circ$ ，则 $\angle AFG$ 的度数是 _____ .



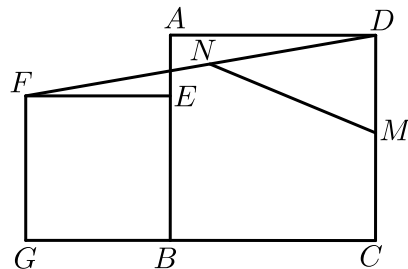
例题4

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，点 E 在线段 CB 的延长线上，连接 DE 交 AB 于点 F ， $\angle AED = 2\angle CED$ ，点 G 是 DF 的中点，若 $BE = 2$ ， $BF = 1$ ， $AG = 5$ ，点 H 是 AD 的中点，则 $GH =$ _____ .



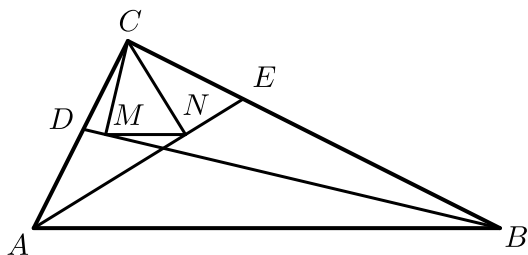
练习4

12. 如图，已知点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 AB 上，以 BE 为边向正方形 $ABCD$ 外部作正方形 $BEFG$ ，连接 DF ， M 、 N 分别是 DC 、 DF 的中点，连接 MN ，若 $AB = 9$ ， $BE = 6$ ，则 MN 的长为 _____ 。

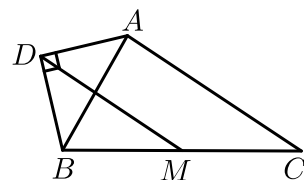


例题5

13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AE ， BD 是角平分线， $CM \perp BD$ 于 M ， $CN \perp AE$ 于 N ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，则 MN 的长为 _____ 。

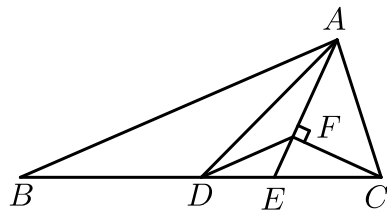


14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 为 BC 的中点， AD 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线，且 $AD \perp BD$ ，若 $AB = 12$ ， $AC = 18$ ，求 MD 的长。

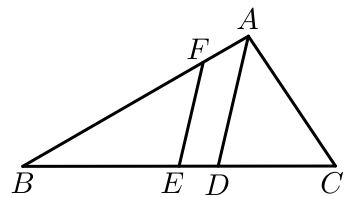


练习5

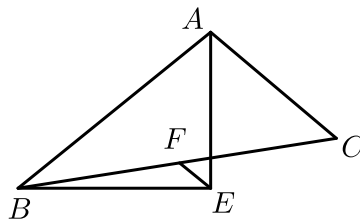
15. 如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是中线， AE 是角平分线， $CF \perp AE$ 于 F ， $AB = 5$ ， $AC = 2$ ，则 DF 的长为 _____ 。



16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，点 E 为 BC 的中点， $EF \parallel AD$ ，则 BF 的长为 _____ 。

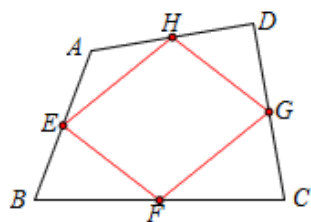


17. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ ， AE 平分 $\angle BAC$ ， $BE \perp AE$ 于点 E ， F 是 BC 的中点，若 $AB = 6$ ， $AC = 4$ ，求 EF 的长。



二、中点四边形

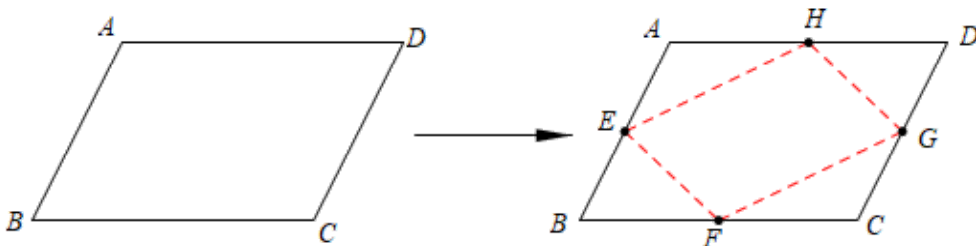
顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点 E, F, G, H ，所得到的新四边形 $EFGH$ 称为_____。



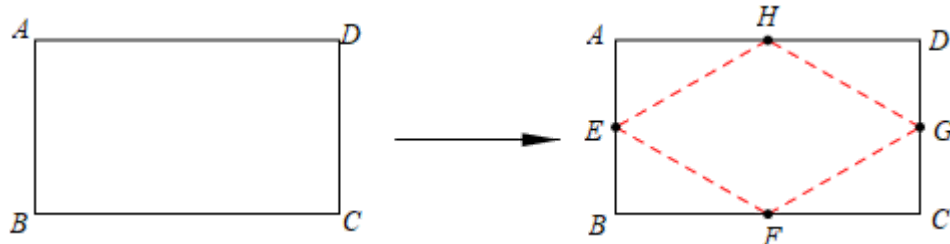
四边形 $HEFG$ 为_____

中点四边形与原四边形的关系：

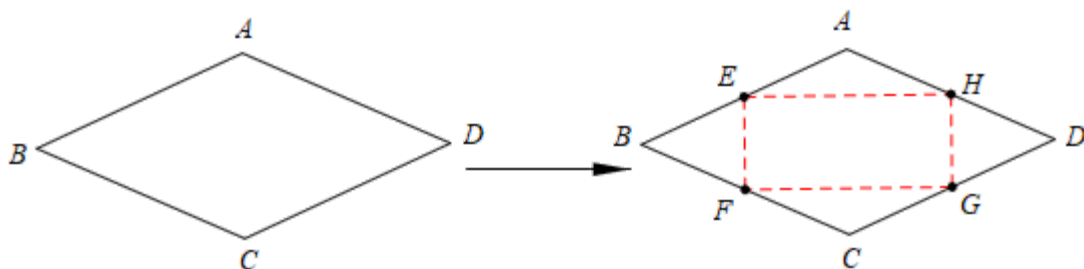
1. 依次连接平行四边形的中点，所得中点四边形是_____



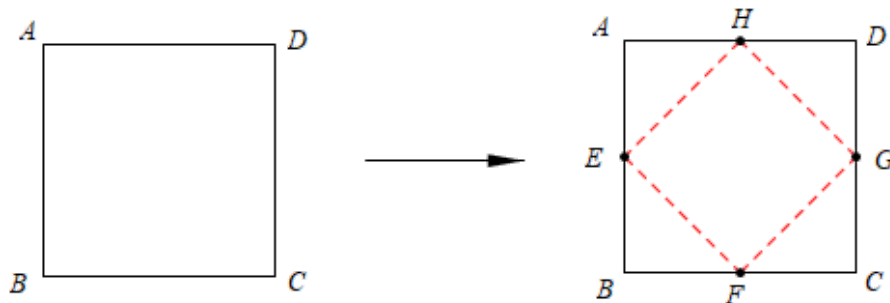
2. 依次连接矩形的中点，所得中点四边形是_____



3. 依次连接菱形的中点，所得中点四边形是_____



4. 依次连接正方形的中点，所得中点四边形是_____

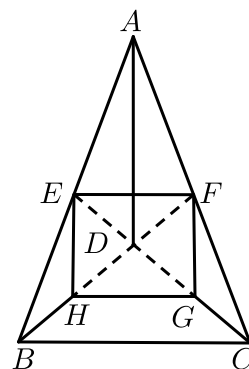


|| 例题6

18. 我们把顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫做中点四边形. 已知四边形 $ABCD$ 的中点四边形是正方形, 对角线 AC 与 BD 的关系, 下列说法正确的是().

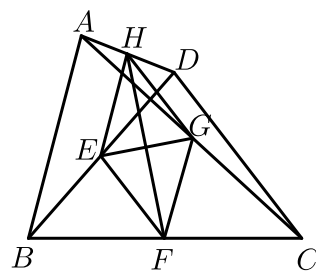
- A. AC, BD 相等且互相平分 B. AC, BD 垂直且互相平分
C. AC, BD 相等且互相垂直 D. AC, BD 垂直且平分对角

19. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 内一点, $BD \perp CD$, $AD = 5$, $BD = 4$, $CD = 3$, E, F, G, H 分别是 AB, AC, CD, BD 的中点, 则四边形 $EFGH$ 的周长是().



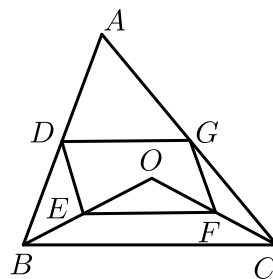
- A. 7 B. 8 C. 10 D. 11

20. 如图, E, F, G, H 分别是 BD, BC, AC, AD 的中点, 且 $AB = CD$. 结论: ① $EG \perp FH$; ②四边形 $EFGH$ 是矩形; ③ HF 平分 $\angle EHG$; ④ $EG = \frac{1}{2}BC$; ⑤四边形 $EFGH$ 的周长等于 $2AB$. 其中正确的个数是().



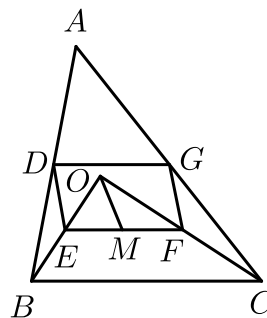
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

21. 如图1, 点 D 、 E 、 F 、 G 分别为线段 AB 、 OB 、 OC 、 AC 的中点.



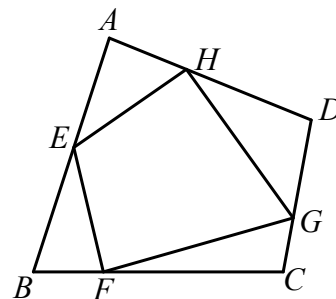
(1) 求证: 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

(2) 如图2, 若点 M 为 EF 的中点, $BE : CF : DG = 2 : 3 : \sqrt{13}$, 求证: $\angle MOF = \angle EFO$.



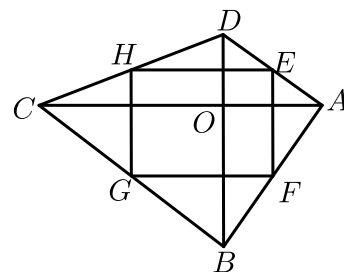
练习6

22. 如图, 任意四边形 $ABCD$ 中, E , F , G , H 分别是 AB , BC , CD , DA 上的点, 对于四边形 $EFGH$ 的形状, 某班学生在一次数学活动课中, 通过动手实践, 探索出如下结论, 其中错误的是 () .

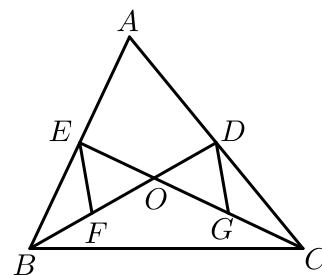


- A. 当 E , F , G , H 是各边中点, 且 $AC = BD$ 时, 四边形 $EFGH$ 为菱形
- B. 当 E , F , G , H 是各边中点, 且 $AC \perp BD$ 时, 四边形 $EFGH$ 为矩形
- C. 当 E , F , G , H 不是各边中点时, 四边形 $EFGH$ 可以为平行四边形
- D. 当 E , F , G , H 不是各边中点时, 四边形 $EFGH$ 不可能为菱形

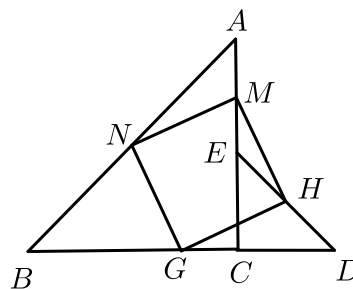
23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC \perp BD$ ，垂足为 O ，点 E 、 F 、 G 、 H 分别为边 AD 、 AB 、 BC 、 CD 的中点．若四边形 $EFGH$ 的面积12，则四边形 $ABCD$ 的面积为_____．



24. $\triangle ABC$ 的中线 BD 、 CE 相交于 O ， F 、 G 分别是 BO 、 CO 的中点，求证： $EF \parallel DG$ ，且 $EF = DG$ ．



25. 如图： $CA = CB$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， M 、 N 、 G 、 H 分别为 AE 、 AB 、 BD 、 DE 的中点．求证：四边形 $MNGH$ 为正方形．



26. 我们给出如下定义：顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫中点四边形．

- (1) 如图1，四边形 $ABCD$ 中，点 E, F, G, H 分别为边 AB, BC, CD, DA 的中点．则中点四边形 $EFGH$ 是 _____ 形．

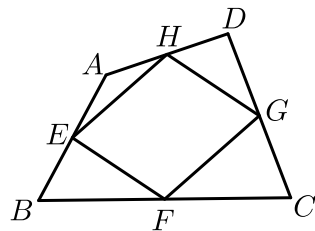


图 1

- (2) 如图2，点 P 是四边形 $ABCD$ 内一点，且满足 $PA = PB, PC = PD, \angle APB = \angle CPD$ ，点 E, F, G, H 分别为边 AB, BC, CD, DA 的中点，试猜想中点四边形 $EFGH$ 的形状并证明．

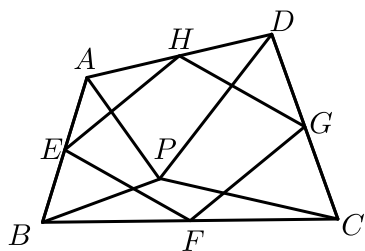


图 2

- (3) 若改变 (2) 中的条件，使 $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$ ，其他条件不变，直接写出中点四边形 $EFGH$ 的形状是 _____ 形．